Exame nacional de Matemática A **(2009, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como se pretende que a eleição seja feita de modo a que os eleitos sejam de sexos diferentes, devemos selecionar 1 dos 8 rapazes e 1 das 12 raparigas e ainda multiplicar por 2 para considerar a hipótese de eles alternarem nos dois cargos.
   Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser feitas é:

   $$8 \times 12 \times 2 = 192$$

   Resposta: **Opção C**

2. Podemos considerar que uma das crianças escreveu uma das letras no papel. Para que as duas crianças escreverem a mesma letra, a segunda criança deverá escolher a mesma letra que a primeira criança.
   Como existem 5 letras (número de casos possíveis) e apenas uma foi escolhida pela primeira criança (número de casos favoráveis) recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade da segunda criança escolher, ao acaso, a letra igual à da primeira criança é $\frac{1}{5}$

   Resposta: **Opção C**

3. Como a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 5$, temos que:
   $P(X \geq 5) = 0{,}5$, logo, como $P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4$, e assim:

   $$P(5 \leq X \leq 6) = P(X \geq 5) - P(X \geq 6) \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}4 = 0{,}5 - P(X \geq 6) \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad P(X \geq 6) = 0{,}5 - 0{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq 6) = 0{,}1$$

   Como a distribuição é simétrica relativamente ao valor médio, temos que $P(X \geq 6) = P(X \leq 4)$ logo $P(X \leq 4) = 0{,}1$, e desta forma:

   - Como $P(X \leq 4) = 0{,}1$ então $P(X \geq 4) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, pelo que
     $P(X \geq 2) \geq P(X \geq 4) \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq 2) \geq 0{,}9$
   - $P(4 \leq X \leq 5) = P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4$
   - $P(4 \leq X \leq 6) = P(4 \leq X \leq 5) + P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$
   - $P(X \leq 4) = P(X \geq 6)$ logo $P(X \leq 4) = 0{,}1$

   Resposta: **Opção B**

4. Temos que:

$$b = a^2 \underset{a>1}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{2}}$$

Assim, usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$1 + \log_b a = 1 + \log_b \left(b^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

5. Calculando a derivada da função f temos:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sen}(2x)\right)' = (2x)' \cos(2x) = 2\cos(2x)$$

Calculando o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$ vem:

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resposta: **Opção A**

6. Como a abcissa do ponto P é positiva, porque este se deslocar sobre o semieixo positivo das abcissas, então podemos considerar a base do triângulo o lado $[OP]$ e a sua medida é a abcissa do ponto P, pelo que $\overline{OP} = x$

Como relativamente à base $[OP]$, a altura é o lado $[PA]$, e a medida da altura é a ordenada do ponto A, temos que $\overline{PA} = f(x) = e^x$

Assim, a área do triângulo $[OAP]$ em função de x (abcissa do ponto P) é:

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PA}}{2} = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x.e^x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

7. Como $i = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, podemos fazer a multiplicação na forma trigonométrica:

$$z = i.\operatorname{cis}(\theta) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

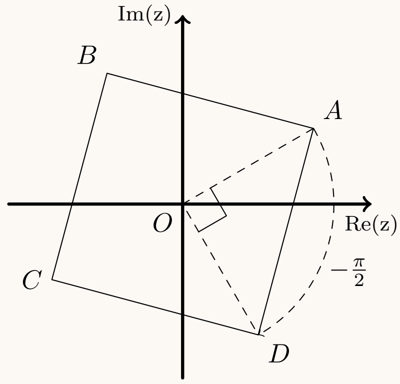
Assim o conjugado de z é:

$$\overline{z} = \operatorname{cis}\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Resposta: **Opção A**

8. Como w é um dos vértices do quadrado, o número complexo que tem como imagem geométrica o ponto D, é um número complexo z, tal que:

   - $|z| = |w| = 2$, porque o quadrado está centrado na origem, logo, todos os vértices estão a igual distância do centro
   - $\arg(z) = \arg(w) - \dfrac{\pi}{2}$, porque a imagem geométrica do número complexo w é o ponto A, visto que $0 \leq \arg(w) \leq \dfrac{\pi}{2}$, ou seja é um ângulo do primeiro quadrante, e o ângulo AOD é reto



   Assim, temos que:

   $$z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

   Acrescentando 2π ao argumento calculado temos:

   $$z = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

   Resposta: **Opção D**

GRUPO II

---

1. Temos que $i^{43} = i^{4\times 10+3} = i^3 = -i$

   Calculando z_1^2 temos: $z_1^2 = (3-2i)^2 = 3^2 - 2\times 3(2i) + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i$

   Como $8\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -8i$, calculando z na forma algébrica, temos:

   $$z = \frac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{(3-2i) + (5-12i) + 2(-i)}{-8i} = \frac{8-16i}{-8i} = \frac{1-2i}{-i} =$$

   $$= \frac{(1-2i)\times i}{-i\times i} = \frac{i-2i^2}{-i^2} = \frac{i-2(-1)}{-(-1)} = 2 + i$$

2. Escrevendo $1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

   - $\rho = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   - $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

   Assim $1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

   Calculando o quadrado e, depois, o produto na f.t. temos:

   $$(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}i) = 2^2\operatorname{cis}(2\theta) \times 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = (4\times 2)\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

   Para que a imagem geométrica do número complexo $(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1+\sqrt{3}i)$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante, o seu argumento deve ser igual a $\frac{5\pi}{4}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}$, pelo que podemos calcular o valor de θ com a igualdade:

   $$2\theta+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\theta = \frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\theta = \frac{15\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow\; 2\theta = \frac{11\pi}{12}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \theta = \frac{11\pi}{24}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

   Como $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, para $k=0$, temos que $\theta = \frac{11\pi}{24}$

3. Temos que:

   $$\begin{aligned} P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) &= P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) && (1)\\ &= 2P\left(\overline{A}\right)+P(B)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A\cup B}\right) && (2)\\ &= 2P\left(\overline{A}\right)+1-P\left(\overline{A\cup B}\right) && (3)\\ &= 2P\left(\overline{A}\right)+1-\Big(1-P(A\cup B)\Big) && (4)\\ &= 2P\left(\overline{A}\right)+1-1+P(A\cup B)\\ &= 2P\left(\overline{A}\right)+P(A\cup B) \end{aligned}$$

   (1) Teorema: $P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$
   (2) Leis de De Morgan: $\overline{X}\cap\overline{Y}=\overline{X\cup Y}$
   (3) Teorema: $P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1$
   (4) Teorema: $P\left(\overline{X}\right)=1-P(X)$

   Logo, $P(B)+P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 2P\left(\overline{A}\right)+P(A\cup B)$ *q.e.d.*

4.

   4.1. Como se pretende que os números sejam pares, para o algarismo das unidades temos apenas 2 hipóteses (o ≪6≫ e o ≪8≫).
   Como se pretende que das restantes 3 posições, duas sejam ocupadas por algarismos ≪5≫ temos ${}^3C_2$ hipóteses de escolher 2 das 3 posições para os algarismos ≪5≫.
   Para a posição restante existem ainda 4 hipóteses (todos os elementos do conjunto A, à exceção do ≪5≫).
   Assim, a quantidade de números números que se podem formar, nestas condições, é

   $$2\times{}^3C_2\times 4 = 24$$

4.2. Analisando o número de divisores de cada elemento do conjunto A, temos:

- $D_1 = \{1\}$, ou seja, o número de divisores de 1 é 1
- $D_3 = \{1,3\}$, ou seja, o número de divisores de 3 é 2
- $D_5 = \{1,5\}$, ou seja, o número de divisores de 5 é 2
- $D_6 = \{1,2,3,6\}$, ou seja, o número de divisores de 6 é 4
- $D_8 = \{1,2,4,8\}$, ou seja, o número de divisores de 8 é 4

Assim o número de divisores do elemento escolhido pode ser 1 (que ocorre 1 em cada 5 vezes), 2 (que ocorre 2 em cada 5 vezes) ou 4 (que ocorre 2 em cada 5 vezes), pelo que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

E o valor médio da variável aleatória X é:

$$\mu = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$$

5. O único gráfico que pode representar a função f é o **Gráfico 4**.

- O **Gráfico 1** não pode representar a função f, porque para $x = 1$, ou seja quando as coordenadas do ponto P são (1,0), a distância ao ponto $A(1,1)$ é 1, pelo que podemos afirmar que $f(1) = 1$
  Como na função representada por este gráfico temos que a imagem do objeto 1 é inferior a 1, então este gráfico não pode representar a função f
- O **Gráfico 2** não pode representar a função f, porque como o ponto P se afasta arbitrariamente do ponto A a distância entre os dois aumenta indefinidamente sem nunca tender para um valor finito.
  Como na função representada por este gráfico existe um valor finito, superior a todas as imagens, então este gráfico não pode representar a função f
- O **Gráfico 3** não pode representar a função f, porque para $x = 0$ e para $x = 2$, ou seja quando as coordenadas do ponto P são (0,0) e (2,0), respetivamente a distância ao ponto $A(1,1)$ é igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, pelo que podemos afirmar que $f(0) = f(2)$
  Como na função representada por este gráfico temos que a imagem do objeto 0 é maior que a imagem do objeto 2, então este gráfico não pode representar a função f

(pode consultar a construção animada do gráfico da função no GeoGebra)

6. Como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, porque resulta de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, o gráfico de g não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x+3}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3e^{-x}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-3e^{-x}}{-x}\right) = \frac{1}{-\infty} - 3 \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) = 0 - 3 \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) =$$

(fazendo $y = -x$, temos que se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$= -3 \times \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{e^y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Logo, não o gráfico de g não tem assíntotas não verticais, quando $x \to -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+3}{e^x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{xe^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{xe^x}\right) = \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty \times (+\infty)} = 0 + \frac{3}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+3}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{e^x}\right) = 1 + \frac{3}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

E assim, vem que o gráfico de g só tem uma assíntota e a sua equação é $y = 1$

7.

7.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = \left(e^x.\cos x\right)' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq Imp}, e^x>0} \ \vee \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x = \operatorname{sen} x$$

No domínio da função, o intervalo $[0,\pi[$, a única solução da equação é $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

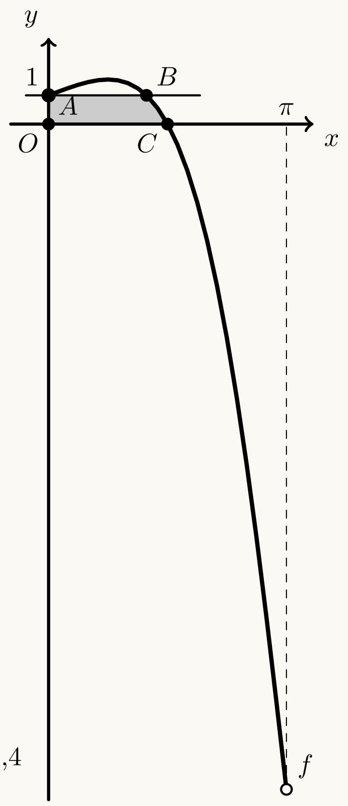
x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
f'	+	+	0	−	n.d
f	min	↗	Máx	↘	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[$;
- tem um mínimo, cujo minimizante é $(x = 0)$ e um máximo, cujo é maximizante $\left(x = \frac{\pi}{4}\right)$

Assim o mínimo relativo da função é $f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$ e o máximo é
$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \cos(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$

7.2. Começamos por representar o gráfico de f, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado), numa janela compatível com o domínio da função.



Calculando a ordenada do ponto A, temos:

$$y_A = f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$$

Assim, traçamos também a reta de equação $y = 1$ para determinar a abcissa do ponto B. Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos (o gráfico de f e a reta $y = 1$), encontramos as coordenadas do ponto B, arredondadas com duas casas decimais, que são: $B(1{,}293; 1)$

Com a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados do zero de uma função, obtemos o valor da abcissa do ponto C, ou seja, do zero da função, que arredondado com duas casas decimais é, $x_C = 1{,}57$

Assim, calculando a área do trapézio, (também reproduzido na figura ao lado) e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{OA} = \frac{x_C + x_B}{2} \times y_A = \frac{1{,}57 + 1{,}29}{2} \times 1 \approx 1{,}4$$

8.

8.1. Como $M_1 = 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25$ e $M_2 = 0{,}67 \log E_2 - 3{,}25$, temos que

$$M_1 - M_2 = 1 \Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 - (0{,}67 \log E_2 - 3{,}25) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 - 0{,}67 \log E_2 + 3{,}25 = 1 \Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 0{,}67 \log E_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}67(\log E_1 - \log E_2) = 1 \Leftrightarrow \log E_1 - \log E_2 = \frac{1}{0{,}67} \Leftrightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{0{,}67} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0{,}67}}$$

E assim temos que $\dfrac{E_1}{E_2} \approx 31$

Assim, no contexto da situação descrita, como $M_1 - M_2 = 1$ e $\dfrac{E_1}{E_2} \approx 31 \Leftrightarrow E_1 \approx 31E_2$, temos que para quaisquer dois sismos cujas magnitudes tenham a diferença de uma unidade (na escala de Richter) a energia libertada (em joules) pela sismo de maior magnitude é aproximadamente 31 vezes superior à que é libertada pelo sismo de menor magnitude.

8.2. Como o sismo teve magnitude 4,7, na escala de Richter, vem que $M = 4{,}7$

E assim, substituindo o valor de M na expressão $M = 0{,}67 \log E - 3{,}25$, e calculando o valor de E, vem:

$$4{,}7 = 0{,}67 \log E - 3{,}25 \Leftrightarrow 4{,}7 + 3{,}25 = 0{,}67 \log E \Leftrightarrow \frac{7{,}95}{0{,}67} \log E \Leftrightarrow E = 10^{\frac{7{,}95}{0{,}67}}$$

Assim, a energia libertada nesse sismo, em notação científica, foi de, aproximadamente 7×10^{11} joules